

LBRIS

We know
books

Colecția EIKON EDUCATIONAL

Seria GIMNAZIU

Editor: Valentin Ajder

© Editura EIKON, 2008

Cluj-Napoca, str. Mecanicilor, nr. 48

Redacția: tel/fax 0364-117246; 0728-084802

e-mail: edituraeikon@yahoo.com

Difuzare: tel/fax 0364-117246; 0728-084803

e-mail: eikondifuzare@yahoo.com

web: www.edituraeikon.ro

ISBN 978-973-757-156-4

Tipărit la FABRICA DE CĂRȚI

tel. 0720-600989

e-mail: fabricadecarti@gmail.com

TEODOR POENARU

ALGEBRA GHID PENTRU GIMNAZIU

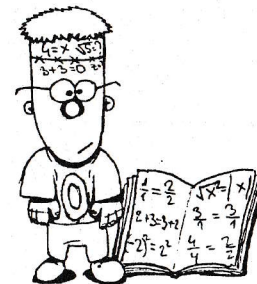
E I K O N

Cluj-Napoca, 2008

Prefață.....	5
1. Mulțimea numerelor raționale. Operații cu numere raționale. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor raționale.....	7
2. Rapoarte și proporții	50
3. Mulțimea numerelor reale. Rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ	76
4. Teste de verificare a cunoștințelor.....	98
5. Calcule cu numere reprezentate prin litere.....	104
6. Sisteme de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute.....	128
7. Inecuații și inegalități	151
8. Funcții. Funcția de gradul întâi.....	172
9. Ecuația de gradul doi.....	202
10. Teste recapitulative de algebră	220

1. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE. OPERAȚII CU NUMERE RAȚIONALE. ECUAȚII ȘI INECUAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

- 1.1. Mulțimi, mulțimi de numere.
- 1.2. Operații cu numere raționale
- 1.3. Teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor naturale.
- 1.4. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$, divizibilitatea în $\mathbb{Z}$
- 1.5. Modulul unui număr rațional.
- 1.6. Ecuatii și inecuații în mulțimea numerelor raționale.
- 1.7. Exerciții rezolvate.
- 1.8. Exerciții propuse.
- 1.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.



1.1. Mulțimi, mulțimi de numere

Mulțimea este un ansamblu, o colecție, o grupare de obiecte de o anumite natură, de un anumit fel.

Notatii: $A, B, \dots, M, N, \dots$ mulțimi

$a, b, \dots, 1, 2, \dots$ elemente

Exprimarea mulțimilor

$A = \{a, b, 1, 2\}$, enumerând elementele ei

$A = \{x \mid x \text{ cu proprietatea } P\}$, punând în evidență o proprietate de care se bucură elementele ei.

Operații cu mulțimi:

1. Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

2. Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

3. Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

Proprietăți

- ❖ Oricare ar fi mulțimile A și B : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, reuniunea și intersecția sunt comutative

- ❖ Oricare ar fi mulțimile A și B : $A \setminus B \neq B \setminus A$, diferența nu este comutativă.
- ❖ Dacă notăm $\emptyset = \{ \}$ mulțimea vidă atunci:
 $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
- ❖ Oricare ar fi mulțimile A , B și C
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
asociativitatea reuniunii și a intersecției.
- ❖ Oricare ar fi mulțimile A , B și C : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
distributivitatea reuniunii față de intersecție
Oricare ar fi mulțimile A , B și C : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
distributivitatea intersecției față de reuniune

Mulțimi de numere

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor

întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ – mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

1.2. Operații cu numere raționale, proprietăți

Proprietățile adunării

- ❖ Comutativitate.
Oricare ar fi numerele raționale a și b avem $a + b = b + a$.
- ❖ Asociativitate
Oricare ar fi numerele raționale a , b și c avem
 $a + (b + c) = (a + b) + c$
- ❖ Existența elementului neutru
În mulțimea numerelor raționale există elementul 0
astfel încât: $a + 0 = 0 + a = a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$,
 0 este elementul la adunare.

- ❖ Existența elementelor opuse

Oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$ există $-a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a + (-a) = 0$,

$-a$ se numește *opusul* lui a .

Proprietățile înmulțirii

- ❖ Comutativitatea
Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ există relația: $a \cdot b = b \cdot a$
- ❖ Asociativitatea
Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Q}$, există relația: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- ❖ Existența elementului neutru
În mulțimea numerelor raționale există 1 astfel încât oricare
ar fi $a \in \mathbb{Q}$, avem: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$,
 1 este element neutru la înmulțire.
- ❖ Elementele sunt inversabile în $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
Oricare ar fi $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, există $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ astfel încât:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$\frac{1}{a}$ se numește inversul lui a .

Proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare

Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Q}$, avem: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Observație. Dacă citim de la dreapta spre stânga egalitatea, spunem că am dat factor comun pe a .

Ridicarea la putere naturală a unui număr rațional

Fie $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}, n \in \mathbb{N}^*$

$a^0 = 1$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$0^n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}^*$ și $n, m \in \mathbb{N}$, avem:

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \cdot a^m = a^{n+m}; a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad (-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{dacă } n \text{ este nr. par} \\ -1 & \text{dacă } n \text{ este nr. impar} \end{cases}$$

1.3. Teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor naturale

Oricare ar fi două numere naturale a și b , $b \neq 0$, există numerele naturale c și r , unic determinate, astfel încât : $a = b \cdot c + r$ și $r < b$.

Numerele naturale a, b, c și r au următoarele denumiri:

a - deîmpărțit,

b - împărțitor

c - cât

r - rest

1.4. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$, divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Divizibilitatea în $\mathbb{N}$

Dacă a și b sunt două numere naturale atunci a este divizibil cu b dacă există numărul natural c astfel încât $a = b \cdot c$

Notăție: $a:b$, a este divizibil cu b ;

$b|a$, b divide pe a .

Criteriile de divizibilitate în $\mathbb{N}$

Un număr este divizibil cu:

- 2, dacă ultima lui cifră este divizibilă cu 2.
- 4, dacă ultimele două cifre ale lui formează un număr divizibil cu 4.
- 5, dacă ultima cifră a lui este 5 sau 0.
- 25, dacă ultimele două cifre sunt zerouri sau formează un număr divizibil cu 25.
- 3, dacă suma cifrelor lui este un număr divizibil cu 3.
- 9, dacă suma cifrelor lui este un număr divizibil cu 9.
- 10, dacă ultima cifră este 0.
- 100, dacă ultimele două cifre sunt 0.

.....
 10^n , $n \in \mathbb{N}^*$, dacă ultimele n cifre sunt 0.

Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Un număr întreg a este divizibil cu un număr întreg b dacă există numărul natural c astfel încât $a = b \cdot c$

Notăm cu D_a - mulțimea divizorilor întregi ai lui a :

$$D_a = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \mid x\}.$$

Exemple: $D_6 = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$,

$$D_5 = \{\pm 1, \pm 5\};$$

$$D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}.$$

1.5. Modulul unui număr rațional

Fie $x \in \mathbb{Q}$, notăm cu $|x|$ modulul lui x sau valoarea absolută a lui x

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Proprietățile modului:

- ❖ $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$
- ❖ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$
- ❖ $|-x| = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$

$$\diamond \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$$

$$\diamond \quad |x + y| \leq |x| + |y|, \text{ oricare ar fi } x, y$$

$$\diamond \quad |x| = a \text{ este echivalent cu } x \in \{-a, a\},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{Q}_+$

$$\diamond \quad |x| \leq a \text{ este echivalent cu } -a \leq x \leq a,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{Q}_+$.

1.6. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor raționale

Ecuații de gradul întâi cu coeficienți raționali

Forma generală: $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$

Rezolvarea ecuației: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației:

$$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid ax + b = 0, a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}.$$

Inecuații de gradul întâi cu coeficienți raționali

Forma generală: $ax + b > 0, ax + b < 0$

$ax + b \geq 0, ax + b \leq 0, a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0.$

Rezolvarea primei inecuații: (celelalte inecuații se rezolvă analog)

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow 1. \ x > -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a > 0$$

$$2. \ x < -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a < 0$$



1.7. Exerciții rezolvate

Numere naturale

R1 Să se calculeze:

$$a) [(2^5 - 2^4) \cdot 31 + 1124] : 12;$$

$$b) (2^{36} : 2^{30} + 36) : (2^2 \cdot 5^2) - (3^{80} : 3^{77} - 26);$$

$$c) (5^{100} : 25^{49} + 2)^{55} : 9^{80} - 3^4;$$

$$d) (2^{88} : 4^{25} + 3^{51} : 9^{25} + 7) : (3^{100} : 9^{48} - 71 + 2^{100} : 4^{31}).$$

Rezolvare

$$a) [(32 - 16) \cdot 31 + 1124] : 12 = (16 \cdot 31 + 1124) : 12$$

$$= (496 + 1124) : 12 =$$

$$= 1620 : 12 = 135.$$

$$b) (2^6 + 36) : (4 \cdot 25) - (3^3 - 26) =$$

$$(64 + 36) : (4 \cdot 25) - (27 - 26) =$$

$$= (64 + 36) : (4 \cdot 25) - (27 - 26) = 100 : 100 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$c) (5^{100} : (5^2)^{49} + 2)^{55} : 9^{80} - 3^4 = (5^{100} : 5^{98} + 2)^{55} : 9^{80} - 3^4 =$$

$$= (5^{100} : 5^{98} + 2)^{55} : 9^{80} - 3^4 = (5^2 + 2)^{55} : 9^{80} - 3^4 =$$

$$= 27^{55} : 9^{80} - 3^4 =$$

$$= 27^{55} : 9^{80} - 3^4 = (3^3)^{55} : (3^2)^{80} - 3^4 = 3^{165} : 3^{160} - 3^4 =$$

$$= 3^5 - 3^4 = 243 - 81 = 162.$$

$$d) [2^{88} : (2^2)^{25} + 3^{51} : (3^2)^{25} + 7] : [3^{100} : (3^2)^{48} - 71 + 2^{100} : (2^2)^{31}] =$$

$$= (2^{88} : 2^{50} + 3^{51} : 3^{51} + 7) : (3^{100} : 3^{96} - 71 + 2^{100} : 2^{62}) =$$

$$= (2^{38} + 3 + 7) : (3^4 - 71 + 2^{38}) = (2^{38} + 10) : (10 + 2^{38}) = 1.$$

R2 Să se determine valorile lui x pentru care numerele de forma $23x5$ îndeplinesc condiția:

- sunt divizibile cu 5;
- sunt divizibile cu 3;
- sunt divizibile cu 15;
- sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 3;
- sunt divizibile cu 3 și nu sunt divizibile cu 5.

Rezolvare

- Numărul $23x5$ având ultima cifră 5 se va divide cu 5 pentru orice $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, adică x poate fi orice cifră.
- Calculăm suma cifrelor numărului dat:
 $2 + 3 + x + 5 = 10 + x$, $10 + x$ este un multiplu de 3 dacă $x \in \{2,5,8\}$.
- Dacă $5 \mid 23x5$, $3 \mid 23x5$ și $(3,5) = 1$, atunci $15 \mid 23x5$. Deci $x \in \{2,5,8\}$.
- Scoatem din mulțimea valorilor lui x pentru care numerele sunt divizibile cu 5, mulțimea valorilor lui x pentru care numerele sunt divizibile cu 3:
 $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{2,5,8\} = \{0,1,3,4,6,7,9\}$
- Scoatem din mulțimea valorilor lui x pentru care numerele sunt divizibile cu 3, mulțimea valorilor lui x pentru care numerele sunt divizibile cu 5
 $x \in \{2,5,8\} \setminus \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \emptyset$

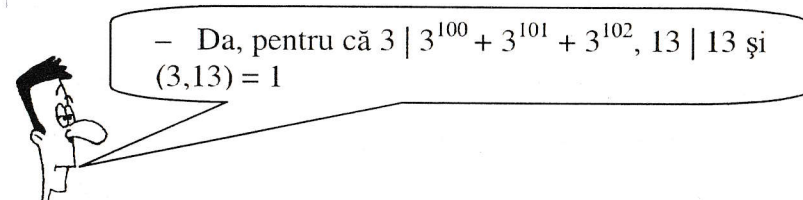
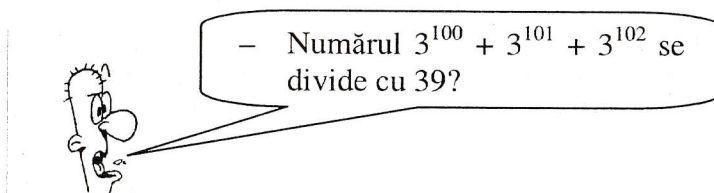
R3 Să se arate că:

- numărul $3^{100} + 3^{101} + 3^{102}$, se divide cu 13
- numărul $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$, se divide cu 31
oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

- Intenționăm să descompunem în factori numărul dat. Pentru aceasta dăm factor comun pe 3^{100} :

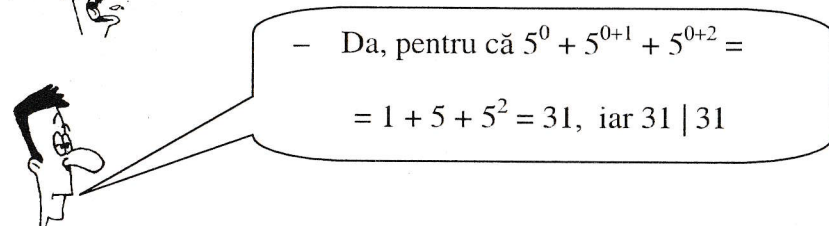
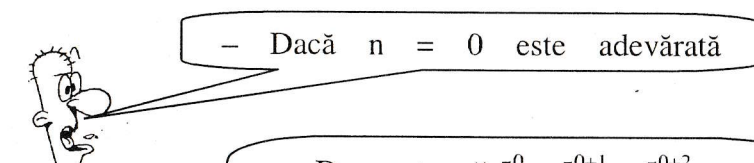
$$3^{100} + 3^{101} + 3^{102} = 3^{100} + 3^{100} \cdot 3 + 3^{100} \cdot 3^2 = 3^{100}(1 + 3 + 9) = 3^{100} \cdot 13, \text{ evident } 13 \mid 3^{100} + 3^{101} + 3^{102}$$



- Facem un raționament asemănător, doar că n este un număr natural oarecare:

$$5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n + 5^n \cdot 5 + 5^n \cdot 5^2 = 5^n(1 + 5 + 5^2) = 5^n \cdot 31$$

Evident, dacă unul din factorii produsului este 31, atunci 31 divide produsul: $31 \mid 5^n \cdot 31 + 5^{n+1} + 5^{n+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.



R4 Să se arate că numărul: $N = \overline{ab51} + 2 \cdot \overline{ab}$ este divizibil cu 51. Numerele sunt scrise în baza 10.

Rezolvare

Descompunem numerele $\overline{ab51}$ și $\overline{ab}$ în baza 10:

$$\overline{ab51} = 10^3a + 10^2b + 10 \cdot 5 + 1 = 1000a + 100b + 51$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\text{Atunci: } N = 1000a + 100b + 51 + 20a + 2b = 1020a + 102b + 51 = 51(20a + 2b + 1), \text{ deci } 51 \mid N.$$

R5 Să se afle numerele de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10, care împărțite la 27 dau restul 19.

Rezolvare

Numărul $\overline{ab}$ se poate scrie sub forma $\overline{ab} = 27 \cdot k + 19$, $k \in \mathbb{N}$,

$$k = 0, \overline{ab} = 27 \cdot 0 + 19 = 19; k = 2, \overline{ab} = 27 \cdot 2 + 19 = 73;$$

$$k = 1, \overline{ab} = 27 \cdot 1 + 19 = 46; k = 3, \overline{ab} = 27 \cdot 3 + 19 = 90.$$

Pentru $k = 4$ se obține un număr format din trei cifre, situație neacceptată în problema dată.

R6 Fie x un număr de forma $x = 6 \cdot a + 35$, $a \in \mathbb{N}$. Aflați restul împărțirii lui x la 6.

Rezolvare

$$x = 6 \cdot a + 35 = 6 \cdot a + 30 + 5 = 6(a + 5) + 5, \text{ rezultă că}$$

$$x = 6k + 5, 5 < 6, \text{ deci restul este egal cu } 5.$$

R7 Să se rezolve ecuațiile în mulțimea numerelor naturale:

$$\text{a) } 2^{30} + x = 4^{15} + 1; \text{ b) } 2x + 3^{90} : 9^{44} = 7^{100} : 7^{98}.$$

Rezolvare

$$\text{a) } 2^{30} + x = 2^{30} + 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b) } 2x + 3^{90} : 3^{88} = 7^{100} : 7^{98} \Leftrightarrow 2x + 3^2 = 7^2 \Leftrightarrow 2x + 9 = 49 \Leftrightarrow 2x = 49 - 9 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20.$$

R8 Să se rezolve inecuațiile în mulțimea numerelor naturale:

$$\text{a) } 3(x + 1) + 5(x + 2) + 7 \leq 3x + 30;$$

$$\text{b) } 7^{21}x + 3^{88} < 9^{44} + 49^{11};$$

$$\text{c) } (7^{130} + 5^{120} + 3^{25}) \cdot x + 3^{25} \cdot (3^{23} + 5) < 9^{24} + 49^{65} + 25^{60} + 18 \cdot 9^{12}.$$

Rezolvare

a)

$$3x + 3 + 5x + 10 + 7 \leq 3x + 30 \Leftrightarrow 8x + 20 \leq 3x + 30 \Leftrightarrow 8x - 3x \leq 30 - 20 \Leftrightarrow 5x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 2, S = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{b) } 7^{21}x + 3^{88} < (3^2)^{44} + (7^2)^{11} \Leftrightarrow 7^{21}x + 3^{88} < 3^{88} + 7^{22} \Leftrightarrow 7^{21}x + 3^{88} - 3^{88} < 7^{22} \Leftrightarrow 7^{21}x < 7^{22} \Leftrightarrow x < 7^{22} : 7^{21} \Leftrightarrow x < 7, S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c)

$$(7^{130} + 5^{120} + 3^{25})x + 3^{48} + 5 \cdot 3^{25} < (3^2)^{24} + (7^2)^{65} + (5^2)^{60} + 18 \cdot (3^2)^{12} \\ \Leftrightarrow (7^{130} + 5^{120} + 3^{25})x + 3^{48} + 5 \cdot 3^{25} < 3^{48} + 7^{130} + 5^{120} + 18 \cdot 3^{24} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (7^{130} + 5^{120} + 3^{25})x < 7^{130} + 5^{120} + 18 \cdot 3^{24} - 5 \cdot 3^{25}$$

dar

$$18 \cdot 3^{24} - 5 \cdot 3^{25} = 6 \cdot 3 \cdot 3^{24} - 5 \cdot 3^{25} = 6 \cdot 3^{25} - 5 \cdot 3^{25} = 3^{25} \cdot (6 - 5) = 3^{25} \cdot 1 = 3^{25},$$

atunci inecuația devine:

$$(7^{130} + 5^{120} + 3^{25})x < 7^{130} + 5^{120} + 3^{25} \Leftrightarrow x < 1, S = \{0\}$$